INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE APPLIQUEE & DE PROSPECTION MINIERE

Concours de 1975

Composition de MATHEMATIQUES (4 h)

Les candidats sont invités à soigner l'écriture, la présentation et la rédaction.

Le réel c envisagé dans tout le problème est un paramètre strictement positif. L'abréviation v. a. est mise pour "variable aléatoire". Les diverses questions de la partie II sont, dans une large mesure, indépendantes dès que (II, 1°) a été traité. X est une v. a. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$; ω désigne l'élément courant de Ω. On donne la probabilité $\Phi(x)$ de l'évènement $(X < x)$ et on suppose qu'il existe une fonction φ (qui, dans tout le problème, sera paire) de variable réelle telle que

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$$

Par ailleurs, on désigne par Φ_1 et φ_1 la fonction de répartition et la densité de la loi normale centrée réduite. Pour la question (II, 3°) on utilisera le tableau suivant :

x	$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\Phi_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)\, dt$
1,5	0,130	0,933
1,6	0,111	0,945

Les graphes demandés seront exécutés dans des repères orthonormés et on se bornera à indiquer leur allure générale.

- I -

On considère la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = -x \text{ si } |x| \leqslant c \quad , \qquad f_1(x) = x \text{ si } |x| > c$$

ainsi que les fonctions f_2 , f_3 , f_4 définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_2(x) = x\, f_1(x) \quad , \qquad f_3(x) = x^2 + \left[f_1(x)\right]^2 \quad , \quad f_4(x) = x - f_1(x)$$

1°) Etudier ces quatre fonctions. En dessiner les graphes dans des repères distincts. Peut-on définir la fonction réciproque f_1^{-1} de f_1 ?

2°) En utilisant les graphes précédents, discuter suivant les valeurs des réels y , z, s, u les inéquations suivantes (où x est l'inconnue) :

$$f_1(x) < y \quad ; \quad f_2(x) < z \quad ; \quad f_3(x) < u \quad ; \quad f_4(x) < s$$

Présenter les résultats dans des tableaux clairs.

- II -

1°) On considère la v. a. Y définie par

$$Y(\omega) = -X(\omega) \text{ si } |X(\omega)| \leqslant c \quad , \qquad Y(\omega) = X(\omega) \text{ si } |X(\omega)| > c$$

a) Quelles sont, en fonction de Φ, la fonction de répartition de Y et, en fonction de φ, sa densité ?

b) On appelle $A(\alpha)$ la probabilité de l'évènement $(X < \alpha$ et $Y < \alpha)$, où α est un réel donné. Etudier en supposant $\Phi = \Phi_1$, la variation de $A(\alpha)$. Construire son graphe. X et Y sont-elles des v. a. indépendantes ?

2°) On définit une v. a. Z par $Z = X\,Y$.

a) Quelles sont, en fonction de Φ, la fonction de répartition G de Z , et, en fonction de φ, sa densité g ? En supposant $\Phi = \Phi_1$, construire, dans des repères distincts, les graphes de G et g.

b) Calculer l'espérance $E(Z)$ de Z . On trouvera une fonction de c qu'on notera $M(c)$. Etudier cette fonction ; montrer en particulier que, quand c tend vers zéro ou devient infini, elle a des limites qui s'expriment simplement en fonction de l'écart type σ de X. Montrer que l'équation $M(c) = 0$ a une solution d. Que peut-on dire pour $c = d$ de la covariance de X et Y ?

3°) On suppose dans ce (II, 3°) que $\Phi = \Phi_1$. Calculer $M(c)$ pour $c = 1,5$ et pour $c = 1,6$ (On pourra éventuellement transformer $M(c)$ en utilisant l'intégration par parties). Donner la valeur approchée de d fournie par une interpolation linéaire.

4°) On définit une v. a. U par $U = X^2 + Y^2$

a) Quelles sont, en fonction de Φ, la fonction de répartition H, et en fonction de φ la densité h de U ?

b) Calculer l'espérance $E(U)$ de U en fonction de l'écart type σ de X

c) On prend $\Phi = \Phi_1$. Calculer la variance de U.

d) Indiquer, sans démonstration, ce qu'auraient été les résultats des (4°, a), b), c)) si X et Y avaient été des v. a. normales centrées, réduites et indépendantes ?

5°) On définit une v. a. S par $S = X - Y$

a) Quelle est, en fonction de Φ, sa fonction de répartition K ?
A-t-on une densité ?

b) Calculer l'espérance $E(S)$ de S. Exprimer la variance $V(S)$ de S en fonction de l'écart type σ de X et de $M(c)$. Que vaut $V(S)$ si $c = d$?

- III -

On se propose de préciser la loi du couple (X, Y).

1°) Dans chacun des cas définis par $|y| < c$, $y \leqslant -c$, $y \geqslant c$, calculer en fonction de Φ la probabilité $T(x, y)$ de l'évènement $(X < x \quad \text{et} \quad Y < y)$. On pourra utiliser le graphe de f_1.

2°) Indiquer, quand $\Phi = \Phi_1$ dans des repères distincts et suivant les valeurs du paramètre réel λ l'allure des graphes des fonctions $x \longrightarrow T(x, \lambda)$.

3°) Préciser le domaine où peut être définie la dérivée $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}$ et, dans ce domaine, la calculer.

4°) Calculer la probabilité de l'évènement $\left(Y = f_1(X)\right)$

a) lorsque X et Y sont les v. a. du II.

b) lorsque X et Y sont normales, centrées, réduites et indépendantes.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail